Métodos Matemáticos I
Teoría de Cauchy Elemental

Javier Pérez González

Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

November 11, 2012

En este capítulo estaremos interesados en el problema de la existencia de primitivas.

En este capítulo estaremos interesados en el problema de la existencia de primitivas.

El Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que toda función real de variable real continua en un intervalo tiene primitivas en dicho intervalo.

En este capítulo estaremos interesados en el problema de la existencia de primitivas.

El Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que toda función real de variable real continua en un intervalo tiene primitivas en dicho intervalo.

La situación es muy distinta para funciones complejas de variable compleja. Ni siquiera el hecho de que una función sea holomorfa en un dominio garantiza que tenga primitivas en dicho dominio.

En este capítulo estaremos interesados en el problema de la existencia de primitivas.

El Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que toda función real de variable real continua en un intervalo tiene primitivas en dicho intervalo.

La situación es muy distinta para funciones complejas de variable compleja. Ni siquiera el hecho de que una función sea holomorfa en un dominio garantiza que tenga primitivas en dicho dominio.

Ejemplo. La función $f(z) = \dfrac{1}{z}$ es holomorfa en el dominio $\mathbb{C}^*$ y no tiene primitivas en dicho dominio.

Como ya debes saber, la herramienta que se usa para la construcción de primitivas es la integración. No debe extrañarte por ello que en este capítulo nuestra herramienta básica sea la integración de funciones complejas.

Como ya debes saber, la herramienta que se usa para la construcción de primitivas es la integración. No debe extrañarte por ello que en este capítulo nuestra herramienta básica sea la integración de funciones complejas.

En este capítulo vamos a obtener resultados importantes con una herramienta muy elemental: la integral de Riemann de funciones continuas.

Diremos que una función $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ es *integrable Riemann* en el intervalo $[a, b]$, y escribiremos $\varphi \in \mathcal{R}([a, b])$, si las funciones $\operatorname{Re}(\varphi)$ y $\operatorname{Im}(\varphi)$ son integrables Riemann en $[a, b]$ en cuyo caso definimos la integral de φ en $[a, b]$ como el número complejo:

$$\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \operatorname{Re}\varphi(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b \operatorname{Im}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

En lo sucesivo la expresión "*f* es integrable" se entenderá como "*f* es integrable Riemann".

Una condición necesaria para la integrabilidad es la acotación.

Una condición necesaria para la integrabilidad es la acotación.

Para nosotros en este curso son suficientes los siguientes criterios de integrabilidad:

Una condición necesaria para la integrabilidad es la acotación.

Para nosotros en este curso son suficientes los siguientes criterios de integrabilidad:

- Toda función acotada y continua salvo en un número finito de puntos es integrable.

Una condición necesaria para la integrabilidad es la acotación.

Para nosotros en este curso son suficientes los siguientes criterios de integrabilidad:

- Toda función acotada y continua salvo en un número finito de puntos es integrable.
- Toda función monótona y acotada es integrable.

- El conjunto $\mathcal{R}([a,b])$ es un espacio vectorial complejo y la aplicación $\varphi \mapsto \int_a^b \varphi$ es una forma lineal. Además, el producto de funciones integrables Riemann en $[a,b]$ es integrable Riemann en $[a,b]$.

- El conjunto $\mathcal{R}([a,b])$ es un espacio vectorial complejo y la aplicación $\varphi \mapsto \int_a^b \varphi$ es una forma lineal. Además, el producto de funciones integrables Riemann en $[a,b]$ es integrable Riemann en $[a,b]$.
- **Acotación básica.** Si $\varphi \in \mathcal{R}([a,b])$ se verifica que $|\varphi| \in \mathcal{R}([a,b])$ y

$$\boxed{\left|\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \sup\{|\varphi(t)| : a \leqslant t \leqslant b\}(b-a)}$$

Si $\{\varphi_n\}$ es una sucesión de funciones integrables en $[a,b]$ que converge uniformemente a φ en $[a,b]$, entonces φ es integrable y

$$\lim \int_a^b \varphi_n = \int_a^b \varphi$$

Si $\{\varphi_n\}$ es una sucesión de funciones integrables en $[a,b]$ que converge uniformemente a φ en $[a,b]$, entonces φ es integrable y

$$\lim \int_a^b \varphi_n = \int_a^b \varphi$$

En particular, si $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ es una serie de funciones integrables que converge uniformemente en $[a,b]$, entonces la función $t \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ es integrable en $[a,b]$ y

$$\boxed{\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(t)\, \mathrm{d}t}$$

- **Aditividad respecto al intervalo.** Si $a < c < b$ y $\varphi \in \mathcal{R}([a,b])$ entonces $\varphi \in \mathcal{R}([a,c])$ y $\varphi \in \mathcal{R}([c,b])$ y

$$\int_a^b \varphi = \int_a^c \varphi + \int_c^b \varphi$$

- **Aditividad respecto al intervalo.** Si $a < c < b$ y $\varphi \in \mathcal{R}([a, b])$ entonces $\varphi \in \mathcal{R}([a, c])$ y $\varphi \in \mathcal{R}([c, b])$ y

$$\int_a^b \varphi = \int_a^c \varphi + \int_c^b \varphi$$

- **Teorema fundamental del cálculo.** Si $\varphi \in \mathcal{R}([a, b])$, entonces la función dada por

$$G(t) = \int_a^t \varphi(s)\,\mathrm{d}s \qquad (t \in [a, b])$$

es continua. Si, además, φ es continua, entonces G es una primitiva de φ en $[a, b]$.

- **Aditividad respecto al intervalo.** Si $a < c < b$ y $\varphi \in \mathcal{R}([a,b])$ entonces $\varphi \in \mathcal{R}([a,c])$ y $\varphi \in \mathcal{R}([c,b])$ y

$$\int_a^b \varphi = \int_a^c \varphi + \int_c^b \varphi$$

- **Teorema fundamental del cálculo.** Si $\varphi \in \mathcal{R}([a,b])$, entonces la función dada por

$$G(t) = \int_a^t \varphi(s)\, \mathrm{d}s \qquad (t \in [a,b])$$

es continua. Si, además, φ es continua, entonces G es una primitiva de φ en $[a,b]$.

- **Regla de Barrow.** Si $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ es derivable en $[a,b]$ y $F' \in \mathcal{R}([a,b])$, entonces

$$\int_a^b F'(t)\, \mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Fórmula del cambio de variable.

Sea $\lambda : [c, d] \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente con derivada continua. Supongamos que φ es integrable en $[\lambda(c), \lambda(d)]$. Entonces

$$\int_{\lambda(c)}^{\lambda(d)} \varphi(s)\,\mathrm{d}s = \int_{c}^{d} \varphi\big(\lambda(t)\big)\lambda'(t)\,\mathrm{d}t$$

Una curva en $\mathbb{C}$ es una aplicación continua $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$.

Una curva en $\mathbb{C}$ es una aplicación continua $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$.

Hay que distinguir entre la curva y su imagen (también llamada traza o soporte), que notaremos por $\gamma^* = \gamma([a, b])$.

Una curva en $\mathbb{C}$ es una aplicación continua $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$.

Hay que distinguir entre la curva y su imagen (también llamada traza o soporte), que notaremos por $\gamma^* = \gamma([a, b])$.

γ^* es un conjunto compacto y conexo.

Una curva en $\mathbb{C}$ es una aplicación continua $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$.

Hay que distinguir entre la curva y su imagen (también llamada traza o soporte), que notaremos por $\gamma^* = \gamma([a, b])$.

γ^* es un conjunto compacto y conexo.

Al punto $\gamma(a)$ se le llama *punto inicial* de la curva γ y a $\gamma(b)$ *punto final*. Ambos reciben el nombre de *extremos de la curva*.

Una curva en $\mathbb{C}$ es una aplicación continua $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$.

Hay que distinguir entre la curva y su imagen (también llamada traza o soporte), que notaremos por $\gamma^* = \gamma([a,b])$.

γ^* es un conjunto compacto y conexo.

Al punto $\gamma(a)$ se le llama *punto inicial* de la curva γ y a $\gamma(b)$ *punto final*. Ambos reciben el nombre de *extremos de la curva*.

Se dice que γ es una curva *cerrada* cuando sus extremos coinciden, esto es, $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Diremos que una curva es *regular* si la aplicación que la define es derivable con derivada continua, esto es, es de clase $\mathscr{C}^1$.

Caminos

Diremos que una curva es *regular* si la aplicación que la define es derivable con derivada continua, esto es, es de clase $\mathcal{C}^1$.

Una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ es *regular a trozos*, y la llamaremos un *camino*, si hay una partición $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ de $[a, b]$ de manera que $\gamma_{|[t_{k-1}, t_k]}$ es regular para $1 \leqslant k \leqslant n$.

Curva opuesta

Llamaremos curva opuesta de una dada $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, y la notaremos por $\dot{-}\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, a la curva definida por

$$(\dot{-}\gamma)(t) = \gamma(b + a - t)$$

Curva opuesta

Llamaremos curva opuesta de una dada $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, y la notaremos por $\dot{-}\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, a la curva definida por

$$(\dot{-}\gamma)(t) = \gamma(b + a - t)$$

Se trata de una curva que tiene la misma traza que γ pero la recorre

en sentido contrario, esto es, el punto inicial de $\dot{-}\gamma$ es el punto final de γ y viceversa. Observa que la curva opuesta de un camino es un camino.

Yuxtaposición de curvas

Dadas dos curvas $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ y $\sigma : [c,d] \to \mathbb{C}$ con $\gamma(b) = \sigma(c)$, definimos una nueva curva que llamaremos *yuxtaposición* de γ y σ o también *suma* de γ y σ, y la notaremos por $\gamma \dot{+} \sigma$, como

$$(\gamma \dot{+} \sigma)(t) = \begin{cases} \gamma(t) & a \leqslant t \leqslant b \\ \sigma(c-b+t) & b \leqslant t \leqslant b+d-c \end{cases}$$

Yuxtaposición de curvas

Dadas dos curvas $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ y $\sigma : [c, d] \to \mathbb{C}$ con $\gamma(b) = \sigma(c)$, definimos una nueva curva que llamaremos *yuxtaposición* de γ y σ o también *suma* de γ y σ, y la notaremos por $\gamma \dot{+} \sigma$, como

$$(\gamma \dot{+} \sigma)(t) = \begin{cases} \gamma(t) & a \leqslant t \leqslant b \\ \sigma(c - b + t) & b \leqslant t \leqslant b + d - c \end{cases}$$

Geométricamente se trata de "pegar" las trazas de γ y σ, de ahí que

se exija que $\gamma(b) = \sigma(c)$, esto es, que podamos pegarlas de forma continua. Evidentemente en los puntos de unión entre una curva y otra puede que no haya derivabilidad. Es fácil probar que

$$(\gamma \dot{+} \sigma)^* = \gamma^* \cup \sigma^*$$

Observa que la yuxtaposición de dos caminos también es un camino.

Caminos más usuales

- **Segmento de origen z y extremo w.** Es la curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ definida por

$$\gamma(t) = (1-t)z + tw$$

Notaremos a esta curva como $\gamma = [z,w]$. Es fácil comprobar que $\dot{-}[z,w] = [w,z]$

Caminos más usuales

- **Segmento de origen z y extremo w.** Es la curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ definida por
$$\gamma(t) = (1-t)z + tw$$
Notaremos a esta curva como $\gamma = [z,w]$. Es fácil comprobar que $\dot{-}[z,w] = [w,z]$
- **Circunferencia de centro a y radio r.** Es la curva $\gamma : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ definida por
$$\gamma(t) = a + r\,\mathrm{e}^{it}$$
La vamos a representar por el símbolo $C(a,r)$. Su imagen es una circunferencia que notamos como $C(a,r)^* \subset \mathbb{C}$.

Caminos más usuales

- **Segmento de origen z y extremo w.** Es la curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ definida por
$$\gamma(t) = (1-t)z + tw$$
Notaremos a esta curva como $\gamma = [z,w]$. Es fácil comprobar que $\dot{-}[z,w] = [w,z]$
- **Circunferencia de centro a y radio r.** Es la curva $\gamma : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ definida por
$$\gamma(t) = a + r\,\mathrm{e}^{it}$$
La vamos a representar por el símbolo $C(a,r)$. Su imagen es una circunferencia que notamos como $C(a,r)^* \subset \mathbb{C}$.
- **Poligonal de vértices** $z_0, z_1, \ldots, z_n$. Es la curva
$$[z_0,z_1] \dot{+} [z_1,z_2] \dot{+} \cdots \dot{+} [z_{n-1},z_n]$$
y la representaremos por $[z_0,z_1,\ldots,z_n]$. La poligonal es un camino.

Longitud de un camino

Si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ es un camino, entonces γ' está definida y es continua en $[a, b]$ excepto en un conjunto finito de puntos de $]a, b[$ en los cuales tiene límites laterales distintos. Dándole a γ' en cada uno de esos puntos el valor del límite por la izquierda (aunque esto es totalmente irrelevante, podemos darle cualquier valor) es claro que γ' es acotada en $[a, b]$ y tiene un número finito de discontinuidades, luego es integrable en $[a, b]$.

Longitud de un camino

Si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ es un camino, entonces γ' está definida y es continua en $[a, b]$ excepto en un conjunto finito de puntos de $]a, b[$ en los cuales tiene límites laterales distintos. Dándole a γ' en cada uno de esos puntos el valor del límite por la izquierda (aunque esto es totalmente irrelevante, podemos darle cualquier valor) es claro que γ' es acotada en $[a, b]$ y tiene un número finito de discontinuidades, luego es integrable en $[a, b]$.

Se define la *longitud* de γ por

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t$$

Curvas equivalentes

Dos curvas $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ y $\sigma : [c, d] \to \mathbb{C}$ se dice que son *equivalentes* cuando existe una aplicación $\varphi : [c, d] \to \mathbb{R}$ cumpliendo

- $\varphi \in \mathcal{C}^1([c, d])$.

Curvas equivalentes

Dos curvas $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ y $\sigma : [c, d] \to \mathbb{C}$ se dice que son *equivalentes* cuando existe una aplicación $\varphi : [c, d] \to \mathbb{R}$ cumpliendo

- $\varphi \in \mathcal{C}^1([c, d])$.
- $\varphi'(u) > 0$ para todo $u \in [c, d]$.

Curvas equivalentes

Dos curvas $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ y $\sigma : [c, d] \to \mathbb{C}$ se dice que son *equivalentes* cuando existe una aplicación $\varphi : [c, d] \to \mathbb{R}$ cumpliendo

- $\varphi \in \mathcal{C}^1([c, d])$.
- $\varphi'(u) > 0$ para todo $u \in [c, d]$.
- $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$.

Curvas equivalentes

Dos curvas $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ y $\sigma : [c, d] \to \mathbb{C}$ se dice que son *equivalentes* cuando existe una aplicación $\varphi : [c, d] \to \mathbb{R}$ cumpliendo

- $\varphi \in \mathcal{C}^1([c, d])$.
- $\varphi'(u) > 0$ para todo $u \in [c, d]$.
- $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$.

Curvas equivalentes

Dos curvas $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ y $\sigma : [c, d] \to \mathbb{C}$ se dice que son *equivalentes* cuando existe una aplicación $\varphi : [c, d] \to \mathbb{R}$ cumpliendo

- $\varphi \in \mathcal{C}^1([c, d])$.
- $\varphi'(u) > 0$ para todo $u \in [c, d]$.
- $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$.

y tal que $\gamma \circ \varphi = \sigma$. En tal caso se dice también que σ es una *reparametrización* de γ.

Curvas equivalentes

Dos curvas $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ y $\sigma : [c, d] \to \mathbb{C}$ se dice que son *equivalentes* cuando existe una aplicación $\varphi : [c, d] \to \mathbb{R}$ cumpliendo

- $\varphi \in \mathcal{C}^1([c, d])$.
- $\varphi'(u) > 0$ para todo $u \in [c, d]$.
- $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$.

y tal que $\gamma \circ \varphi = \sigma$. En tal caso se dice también que σ es una *reparametrización* de γ.

Dos curvas equivalentes tienen la misma traza, mismo punto inicial y mismo punto final.

Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un camino y $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ una aplicación continua. Definimos la *integral de f a lo largo del camino* γ como el número complejo

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un camino y $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ una aplicación continua. Definimos la *integral de f a lo largo del camino γ* como el número complejo

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

Observemos que $t \mapsto f(\gamma(t))\gamma'(t)$ es una función de variable real con valores complejos que está acotada y solamente puede tener un número finito de discontinuidades, luego la integral de la derecha es la integral que ya hemos definido antes.

Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un camino y $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ una aplicación continua. Definimos la *integral de f a lo largo del camino* γ como el número complejo

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

Observemos que $t \mapsto f(\gamma(t))\gamma'(t)$ es una función de variable real con valores complejos que está acotada y solamente puede tener un número finito de discontinuidades, luego la integral de la derecha es la integral que ya hemos definido antes.

En lo que sigue notaremos $\mathcal{C}(\gamma^*)$ el espacio vectorial complejo de las funciones complejas continuas en γ^*.

Observación

Para que la integral $\int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$ tenga sentido es suficiente que la función compuesta $t \mapsto f \circ \gamma(t) = f\big(\gamma(t)\big)$ sea integrable en $[a, b]$; en particular, es suficiente que sea continua en $[a, b]$. Para ello no es imprescindible que f sea continua en γ^*. Por ejemplo, aunque la función $f(z) = \sqrt{z}$ no es continua en $C(0, 1)^*$, la función compuesta $f \circ C(0, 1)$ sí es continua pues $f \circ C(0, 1)(t) = f(\mathrm{e}^{it}) = \mathrm{e}^{it/2}$ para todo $t \in [-\pi, \pi]$.

Hemos distinguido antes entre una curva, que es una aplicación, y su imagen, que es un conjunto de puntos del plano. Esta distinción no es un capricho sino que es esencial tenerla clara para entender el significado de la integral curvilínea. Los siguientes ejemplos son ilustrativos.

Hemos distinguido antes entre una curva, que es una aplicación, y su imagen, que es un conjunto de puntos del plano. Esta distinción no es un capricho sino que es esencial tenerla clara para entender el significado de la integral curvilínea. Los siguientes ejemplos son ilustrativos.

Sean γ_1, γ_2 y γ_3 los caminos definidos por $\gamma_1(t) = e^{it}$, $\gamma_2(t) = e^{-it}$ y $\gamma_3(t) = e^{3it}$ para $t \in [0, 2\pi]$. Tenemos que:

Hemos distinguido antes entre una curva, que es una aplicación, y su imagen, que es un conjunto de puntos del plano. Esta distinción no es un capricho sino que es esencial tenerla clara para entender el significado de la integral curvilínea. Los siguientes ejemplos son ilustrativos.

Sean γ_1, γ_2 y γ_3 los caminos definidos por $\gamma_1(t) = e^{it}$, $\gamma_2(t) = e^{-it}$ y $\gamma_3(t) = e^{3it}$ para $t \in [0, 2\pi]$. Tenemos que:

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} i\, e^{it}\, dt = 2\pi i$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{-it}} (-i)\, e^{-it}\, dt = -2\pi i$$

$$\int_{\gamma_3} \frac{1}{z}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{3it}} 3i\, e^{3it}\, dt = 6\pi i$$

Hemos distinguido antes entre una curva, que es una aplicación, y su imagen, que es un conjunto de puntos del plano. Esta distinción no es un capricho sino que es esencial tenerla clara para entender el significado de la integral curvilínea. Los siguientes ejemplos son ilustrativos.

Sean γ_1, γ_2 y γ_3 los caminos definidos por $\gamma_1(t) = e^{it}$, $\gamma_2(t) = e^{-it}$ y $\gamma_3(t) = e^{3it}$ para $t \in [0, 2\pi]$. Tenemos que:

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} i\,e^{it}\,dt = 2\pi i$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{-it}} (-i)\,e^{-it}\,dt = -2\pi i$$

$$\int_{\gamma_3} \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{3it}} 3i\,e^{3it}\,dt = 6\pi i$$

Observa que las tres curvas tienen la misma imagen que es la circunferencia de centro 0 y radio 1. Parece que la integral de *una misma función* en la *misma circunferencia unidad* unas veces vale una cosa y otras veces vale otra. ¿Cómo es posible?

Respuesta: porque no estamos integrando en la circunferencia unidad sino que estamos calculando la integral de la función $1/z$ a lo largo de los caminos γ_1, γ_2 y γ_3 y estos caminos son distintos. Es cierto que todos ellos tienen el mismo soporte, la circunferencia unidad, pero cada uno de ellos la recorre de forma diferente: γ_1 la recorre una sola vez en sentido anti horario, γ_2 la recorre una sola vez en sentido horario y γ_3 la recorre tres veces en sentido anti horario.

Respuesta: porque no estamos integrando en la circunferencia unidad sino que estamos calculando la integral de la función $1/z$ a lo largo de los caminos γ_1, γ_2 y γ_3 y estos caminos son distintos. Es cierto que todos ellos tienen el mismo soporte, la circunferencia unidad, pero cada uno de ellos la recorre de forma diferente: γ_1 la recorre una sola vez en sentido anti horario, γ_2 la recorre una sola vez en sentido horario y γ_3 la recorre tres veces en sentido anti horario.

¿Te das cuenta de lo que pasa? En lo que se refiere al concepto de "integral curvilínea" *una curva no es un objeto geométrico, no es un conjunto de puntos del plano, sino un objeto analítico, es una aplicación.* Cuando calculas una integral curvilínea tienes que saber en qué sentido se recorre la curva y cuántas veces se recorre y *esas cosas no se saben con el sólo conocimiento del soporte sino que necesitas conocer la representación concreta de la curva, la aplicación que la define*.

Propiedades de la integral curvilínea

- Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ y $\sigma : [c,d] \to \mathbb{C}$ son caminos equivalentes y $f \in \mathcal{C}(\gamma^*)$ se verifica que

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\sigma} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Propiedades de la integral curvilínea

- Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ y $\sigma : [c,d] \to \mathbb{C}$ son caminos equivalentes y $f \in \mathcal{C}(\gamma^*)$ se verifica que

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\sigma} f(z)\,dz$$

- Dados dos caminos γ, σ y una función compleja f continua en $\gamma^* \cup \sigma^*$ se cumple

$$\int_{\gamma \dot{+} \sigma} f(z)\,dz = \int_{\gamma} f(z)\,dz + \int_{\sigma} f(z)\,dz$$

Propiedades de la integral curvilínea

- Si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ y $\sigma : [c, d] \to \mathbb{C}$ son caminos equivalentes y $f \in \mathcal{C}(\gamma^*)$ se verifica que

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\sigma} f(z)\,\mathrm{d}z$$

- Dados dos caminos γ, σ y una función compleja f continua en $\gamma^* \cup \sigma^*$ se cumple

$$\int_{\gamma \dot{+} \sigma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\sigma} f(z)\,\mathrm{d}z$$

- $\displaystyle\int_{\dot{-}\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$.

Propiedades de la integral curvilínea

- Si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ y $\sigma : [c, d] \to \mathbb{C}$ son caminos equivalentes y $f \in \mathcal{C}(\gamma^*)$ se verifica que

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\sigma} f(z)\,\mathrm{d}z$$

- Dados dos caminos γ, σ y una función compleja f continua en $\gamma^* \cup \sigma^*$ se cumple

$$\int_{\gamma \dot{+} \sigma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\sigma} f(z)\,\mathrm{d}z$$

- $\displaystyle\int_{\dot{-}\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$.

- **Acotación básica**

$$\boxed{\left|\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \max\{|f(z)| : z \in \gamma^*\}\,\ell(\gamma)}$$

Propiedades de la integral curvilínea

- **Linealidad**. Se verifica que la aplicación $f \mapsto \int_\gamma f$ del espacio vectorial $\mathcal{C}(\gamma^*)$ en $\mathbb{C}$ es una forma lineal.

Propiedades de la integral curvilínea

- **Linealidad**. Se verifica que la aplicación $f \mapsto \int_\gamma f$ del espacio vectorial $\mathcal{C}(\gamma^*)$ en $\mathbb{C}$ es una forma lineal.
- **Permutación del límite uniforme y la integral**. Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones continuas en γ^* que converge uniformemente en γ^* a una función f, se verifica que f es continua en γ^* y

$$\lim \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

En particular

$$\boxed{\int_\gamma \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right)\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z}$$

siempre que la serie converja uniformemente en γ^*.

Regla de Barrow

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, f una función continua en Ω y supongamos que hay una función $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$. Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un camino cualquiera en Ω (esto es, $\gamma^* \subset \Omega$), entonces

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big)$$

Condición necesaria para la existencia de primitivas.

Si una función continua f en un abierto Ω admite una primitiva en Ω, entonces la integral curvilínea de f es la misma para todos los caminos en Ω que tienen los mismos puntos inicial y final.

En particular, para todo camino cerrado γ en Ω se verifica que $\int_\gamma f(w)\, dw = 0$

Existencia de primitivas locales

La función suma de una serie de potencias no trivial tiene primitivas en el dominio de convergencia de la serie.

En consecuencia, una función analítica en un abierto tiene localmente primitivas.

Existencia de primitivas locales

La función suma de una serie de potencias no trivial tiene primitivas en el dominio de convergencia de la serie.

En consecuencia, una función analítica en un abierto tiene localmente primitivas.

Sabemos que $f(z) = \dfrac{1}{z}$ para $z \in \mathbb{C}^*$ no tiene primitivas en $\mathbb{C}^*$, pero también sabemos que f es analítica en $\mathbb{C}^*$ con lo cual f tiene primitivas localmente.

Existencia de primitivas locales

La función suma de una serie de potencias no trivial tiene primitivas en el dominio de convergencia de la serie.

En consecuencia, una función analítica en un abierto tiene localmente primitivas.

Sabemos que $f(z) = \dfrac{1}{z}$ para $z \in \mathbb{C}^*$ no tiene primitivas en $\mathbb{C}^*$, pero también sabemos que f es analítica en $\mathbb{C}^*$ con lo cual f tiene primitivas localmente.

Esto pone de manifiesto que *el problema de existencia de primitivas es un problema global, no local*.

Construcción de primitivas

Sea f una función continua en un abierto Ω y supongamos que la integral de f sobre todo camino cerrado en Ω es nula.

Fijemos un punto $z_0 \in \Omega$, y para cada $z \in \Omega$ sea γ_z un camino en Ω cuyo punto inicial sea z_0 y cuyo punto final sea z. La función $F : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(w)\,\mathrm{d}w$$

es una primitiva de f en Ω.

Caracterización de existencia de primitivas

Sea f una función continua en un abierto Ω. Se verifica que f tiene primitivas en Ω si, y sólo si, la integral de f sobre todo camino cerrado en Ω es nula.

Sea f una función holomorfa en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y sea $\Delta(a,b,c)$ un triángulo de vértices a,b,c contenido en Ω.

Entonces

$$\int_{[a,b,c,a]} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Teorema de Cauchy para dominios estrellados

Un abierto Ω es un *dominio estrellado* respecto de un punto $z_0 \in \Omega$ si el segmento que une z_0 con cualquier otro punto de Ω se queda dentro de Ω.

Teorema de Cauchy para dominios estrellados

Un abierto Ω es un *dominio estrellado* respecto de un punto $z_0 \in \Omega$ si el segmento que une z_0 con cualquier otro punto de Ω se queda dentro de Ω.

Toda función holomorfa en un dominio estrellado tiene primitivas en dicho dominio.

Existencia de logaritmos holomorfos

Toda función holomorfa que no se anula en un dominio estrellado tiene logaritmos holomorfos en dicho dominio. En particular, tiene raíces holomorfas de cualquier orden.

El teorema de Cauchy–Goursat y el teorema de Cauchy para dominios estrellados permanecen válidos si suponemos que f es continua en Ω y es derivable en Ω salvo en algún punto α de Ω.

Un cálculo necesario

- $$\int_{C(a,\rho)} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w = 0 \quad \text{si } z \notin \overline{D}(a,\rho).$$

Un cálculo necesario

- $$\int_{C(a,\rho)} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w = 0 \quad \text{si } z \notin \overline{D}(a,\rho).$$
- $$\int_{C(a,\rho)} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w = 2\pi i \quad \text{si } z \in D(a,\rho).$$

El siguiente resultado es la clave para probar que toda función holomorfa es analítica.

Sea f una función holomorfa en un abierto Ω y supongamos que el disco cerrado $\overline{D}(a,R)$ está contenido en Ω. Entonces se verifica que

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,R)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w \qquad (\forall z \in D(a,R))}$$

Integrales tipo Cauchy

Sean γ un camino en $\mathbb{C}$ y $\varphi : \gamma^* \to \mathbb{C}$ una función continua. Pongamos $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma^*$, y sea $h : \Omega \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$h(z) = \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{w - z}\, \mathrm{d}w \qquad (z \in \Omega).$$

Para cada $a \in \Omega$ sea $\rho_a = \inf\{|z - a| : z \in \gamma^*\}$. Entonces se verifica que:

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w - a)^{n+1}}\, \mathrm{d}w \right) (z - a)^n \qquad \text{para todo } z \in D(a, \rho_a)$$

Es decir, h es analítica en Ω. Por tanto, h es indefinidamente derivable en Ω y

$$\frac{h^{(n)}(z)}{n!} = \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w - z)^{n+1}}\, \mathrm{d}w \qquad \text{para todo } z \in \Omega$$

Teorema de Taylor

Sean Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y f una función holomorfa en Ω . Para cada $a \in \Omega$ definamos

$$R_a = \inf\{|z - a| : z \in \mathbb{C} \setminus \Omega\} \qquad (R_a = +\infty \text{ si } \Omega = \mathbb{C})$$

Entonces para todo $z \in D(a, R_a)$ se verifica que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

Y para $0 < R < R_a$ los coeficientes de la serie vienen dados por

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,R)} \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} \, \mathrm{d}w \qquad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

En consecuencia, la función f es analítica en Ω y para todo $z \in D(a, R_a)$

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,R)} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} \, \mathrm{d}w \qquad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

Y las integrales anteriores no dependen de R.

Observa que el teorema anterior nos dice que la serie de Taylor de f converge *por lo menos* en el disco más grande centrado en a y contenido en Ω y que su suma en *dicho disco* es f. Por tanto, el radio de convergencia, R, de la serie de Taylor de f en a es mayor o igual que R_a ($R = +\infty$ si $R_a = +\infty$), pero puede ocurrir que $R > R_a$.

En particular, obtenemos el siguiente resultado:

Sea f una función entera. Entonces la serie de Taylor de f centrada en cualquier punto converge en todo $\mathbb{C}$ y su suma es igual a f.

Teorema de extensión de Riemann

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, $\alpha \in \Omega$ y supongamos que f es holomorfa en $\Omega \setminus \{\alpha\}$. Equivalen:

Teorema de extensión de Riemann

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, $\alpha \in \Omega$ y supongamos que f es holomorfa en $\Omega \setminus \{\alpha\}$. Equivalen:

a) f tiene una extensión holomorfa a Ω, es decir, existe una función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g(z) = f(z)$ para cualquier punto de $z \in \Omega$, $z \neq \alpha$.

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, $\alpha \in \Omega$ y supongamos que f es holomorfa en $\Omega \setminus \{\alpha\}$. Equivalen:

a) f tiene una extensión holomorfa a Ω, es decir, existe una función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g(z) = f(z)$ para cualquier punto de $z \in \Omega$, $z \neq \alpha$.

b) f tiene una extensión continua en Ω, esto es, existe $h \in \mathcal{C}(\Omega)$ tal que $h(z) = f(z)$ para cada $z \in \Omega \setminus \{\alpha\}$. Equivalentemente existe el límite $\lim_{z\to\alpha} f(z)$.

Teorema de extensión de Riemann

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, $\alpha \in \Omega$ y supongamos que f es holomorfa en $\Omega \setminus \{\alpha\}$. Equivalen:

a) f tiene una extensión holomorfa a Ω, es decir, existe una función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g(z) = f(z)$ para cualquier punto de $z \in \Omega$, $z \neq \alpha$.

b) f tiene una extensión continua en Ω, esto es, existe $h \in \mathcal{C}(\Omega)$ tal que $h(z) = f(z)$ para cada $z \in \Omega \setminus \{\alpha\}$. Equivalentemente existe el límite $\lim\limits_{z \to \alpha} f(z)$.

c) f está acotada en un entorno reducido de α.

Teorema de extensión de Riemann

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, $\alpha \in \Omega$ y supongamos que f es holomorfa en $\Omega \setminus \{\alpha\}$. Equivalen:

a) f tiene una extensión holomorfa a Ω, es decir, existe una función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g(z) = f(z)$ para cualquier punto de $z \in \Omega$, $z \neq \alpha$.

b) f tiene una extensión continua en Ω, esto es, existe $h \in \mathcal{C}(\Omega)$ tal que $h(z) = f(z)$ para cada $z \in \Omega \setminus \{\alpha\}$. Equivalentemente existe el límite $\lim_{z \to \alpha} f(z)$.

c) f está acotada en un entorno reducido de α.

d) $\lim_{z \to \alpha} (z - \alpha) f(z) = 0$.

Es un recíproco del teorema de Cauchy–Goursat.

Teorema de Morera

Es un recíproco del teorema de Cauchy–Goursat.

Sea Ω un abierto y f una función compleja continua en Ω. Equivalen:

- f es holomorfa en Ω.

Teorema de Morera

Es un recíproco del teorema de Cauchy–Goursat.

Sea Ω un abierto y f una función compleja continua en Ω. Equivalen:

- f es holomorfa en Ω.
- Para todo triángulo $\Delta(a,b,c)$ contenido en Ω se verifica que:

$$\int_{[a,b,c,a]} f(w)\,\mathrm{d}w = 0$$

Desigualdades de Cauchy

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, f una función holomorfa en Ω, a un punto cualquiera de Ω y $R > 0$ tal que $\overline{D}(a,R) \subset \Omega$. Entonces para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se verifica que

$$\frac{|f^{(k)}(a)|}{k!} \leqslant \frac{M(R)}{R^k}$$

donde $M(R) = \max\{|f(w)| : w \in C(a,R)^*\}$

Teorema de Liouville

Toda función entera y acotada es constante.

Toda función entera y acotada es constante.

Consecuencias inmediatas de este resultado:

Teorema de Liouville

Toda función entera y acotada es constante.

Consecuencias inmediatas de este resultado:

- La imagen de una función entera no constante es densa en el plano. Simbólicamente, si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ es no constante entonces $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$.

Teorema de Liouville

Toda función entera y acotada es constante.

Consecuencias inmediatas de este resultado:

- La imagen de una función entera no constante es densa en el plano. Simbólicamente, si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ es no constante entonces $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$.
- Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es una función entera no constante entonces
$$u(\mathbb{C}) = \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad v(\mathbb{C}) = \mathbb{R}$$

Teorema Fundamental del Álgebra

$\mathbb{C}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado. Es decir, si $P(z)$ es una función polinómica no constante con coeficientes complejos existe algún $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $P(z_0) = 0$.

Teorema de convergencia de Weierstrass

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en Ω. Supongamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω. Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ la función límite puntual

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \{f_n(z)\} \qquad (z \in \Omega)$$

Entonces

Teorema de convergencia de Weierstrass

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en Ω. Supongamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω. Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ la función límite puntual

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \{f_n(z)\} \qquad (z \in \Omega)$$

Entonces

- f es holomorfa en Ω.

Teorema de convergencia de Weierstrass

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en Ω. Supongamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω. Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ la función límite puntual

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \{f_n(z)\} \qquad (z \in \Omega)$$

Entonces

- f es holomorfa en Ω.
- Para cada natural k la sucesión de las derivadas k-ésimas $\{f_n^{(k)}\}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω a la derivada k-ésima $f^{(k)}$ de la función límite.